

La Gravità

Dalla legge di Newton alla teoria della relatività di Einstein

di Furio Forni

Come lo stesso Newton ebbe ad ammettere, tutte le sue grandissime scoperte furono possibili perché lui poté "erigersi sulle spalle di Giganti". Per quanto riguarda la gravità, i giganti a cui sicuramente lui si riferiva furono Keplero. e Galileo.



Keplero deve essere ricordato per le sue famose 3 leggi che spiegano il moto dei pianeti intorno al sole.

Negando l'antichissimo principio secondo cui i corpi celesti dovevano percorrere orbite circolari, perché erano, per motivi metafisici, le uniche orbite "perfette", egli affermò nella sua prima legge che i pianeti orbitano attorno al Sole percorrendo traiettorie ellittiche delle quali il Sole

occupa uno dei fuochi.

La seconda legge stabilisce che la retta che congiunge un pianeta al Sole (il raggio vettore) descrive aree uguali in tempi uguali; ciò significa che ogni pianeta percorre più rapidamente i tratti di orbita più vicini al Sole.

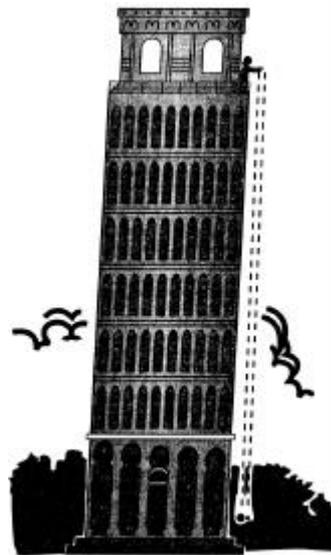
La terza legge afferma che il rapporto tra il cubo della distanza media d di un pianeta dal Sole e il quadrato del suo periodo di rivoluzione è costante; cioè il rapporto d^3/t^2 è lo stesso per tutti i pianeti.



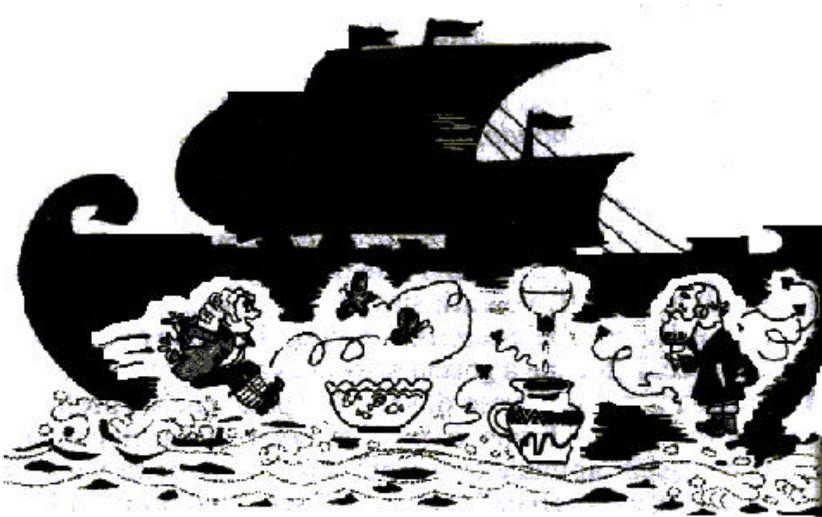
Tra le innumerevoli scoperte e contributi di Galileo, vanno ricordati in particolare 3 scoperte fondamentali:

Per primo va ricordato come Galileo, in aperta critica del pensiero aristotelico, sostenne che il tempo di caduta

dei corpi è indipendente (se si trascura la resistenza dell'aria) dal peso e dalla composizione dei corpi stessi. Si dice che per dimostrare ai suoi allievi l'errore del filosofo greco, secondo il quale la velocità di caduta di



un corpo era proporzionale al suo peso, egli abbia lasciato cadere contemporaneamente due oggetti di peso diverso dalla Torre pendente di Pisa.



Il secondo grande contributo è la formulazione esatta (ed ancora oggi valida) del principio di inerzia: un corpo non soggetto a forze, se fermo rimane fermo, se in moto continua di moto rettilineo uniforme. Tale principio fu enunciato chiaramente nel 1632 nel "Dialogo sopra i due massimi

sistemi del mondo", nel quale Salviati, sostenitore del sistema copernicano, come risposta alla domanda: se la terra è in rapido movimento, come mai questo non viene avvertito dalle popolazioni che la abitano? Egli, prendendo come esempio il moto uniforme di una nave, fa vedere che sia che questa è ferma sia che si muova uniformemente nell'acqua, tutti i fenomeni (gocce che cadono, farfalle che volano, salti, lanci di oggetti, ecc..) non cambiano.

Infine come terzo contributo occorre ricordare la scoperta della legge matematica del moto uniformemente accelerato, cioè quello che è sperimentato dai corpi in caduta sulla terra (lui usò dei piani inclinati per rendere più lento il moto)

Caratteristica comune di tutte queste leggi è la loro verità sperimentale, senza dare alcuna spiegazione sul perché. E' lecito infatti domandarsi perché le orbite sono ellittiche e non circolari?, perché la legge del moto uniformemente accelerato ha proprio quella forma. Perché due corpi con pesi diversi cadono dalla stessa altezza in tempi uguali?



La genialità di Isaac Newton è quella di avere scoperto una motivazione più profonda a queste leggi ricavandole come "casi particolari" di teorie più generali: la dinamica e la legge di gravitazione universale



Secondo un aneddoto ormai leggendario, tra il 1665 e il 1666 Newton, vedendo cadere una mela nel suo frutteto, comprese che il moto della Luna e di una mela erano riconducibili alla medesima forza..

La legge di gravitazione universale, formulata da Newton nel 1684, afferma che

l'attrazione gravitazionale tra due corpi è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse (gravitazionali) e inversamente proporzionale al quadrato della loro reciproca distanza. L'espressione algebrica di questa legge è:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

dove F è la forza gravitazionale, m_1 e m_2 le masse dei due corpi, d la loro mutua distanza, e G la costante gravitazionale. Il valore di questa costante fu misurato per la prima volta dal fisico inglese Henry Cavendish nel 1798 per mezzo della bilancia di torsione. Il valore attualmente riconosciuto è $6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2\text{kg}^{-2}$ che rappresenta l'intensità della forza di interazione tra due corpi sferici, ciascuno di massa pari a 1 kg e posti a distanza di 1 m l'uno dall'altro.

L'accezione "universale" della legge è dovuta alla riunificazione dei fenomeni terrestri e di quelli celesti, fino ad allora considerati distinti e non soddisfacenti alle medesime leggi.

La dinamica è stata formalizzata da Newton con tre principi fondamentali.

La prima legge del moto, nota anche come primo principio della dinamica o legge d'inerzia (già espresso da Galileo), afferma che, se la somma (vettoriale) delle forze che agiscono su un corpo è nulla, questo conserva il proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

La seconda legge del moto, o principio fondamentale della dinamica, stabilisce che una forza applicata a un corpo indeformabile gli imprime un'accelerazione a essa proporzionale, e nella stessa direzione, che può essere espressa dalla relazione:

$$F = ma$$

La costante di proporzionalità è la massa inerziale del corpo. Tale massa, che è una misura della resistenza del corpo a modificare la velocità, è anche una misura dell'attrazione gravitazionale esercitata dal corpo sugli altri corpi.

C'è un significato profondo nel fatto che le proprietà inerziali di un corpo e le proprietà gravitazionali siano determinate dalla medesima caratteristica fisica. Per Newton, però, questa era da considerarsi una "coincidenza" (in fisica le coincidenze sono da guardarsi con molto sospetto in quanto spesso nascondono principi fondamentali).

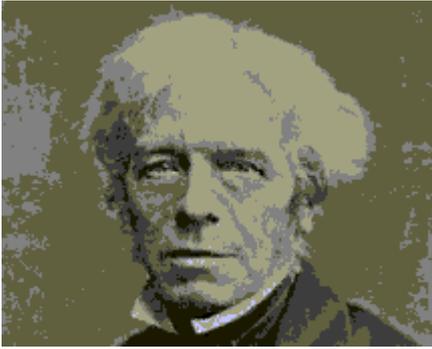
L'eguaglianza tra la massa inerziale (quella che compare nella legge $F=ma$) e la massa gravitazionale (quella che compare nella legge $F=Gm_1m_2/d^2$) produce un fenomeno di cui si era già accorto Galileo: tutti i corpi indipendentemente dalla loro grandezza, composizione, peso ecc, subiscono la stessa accelerazione, se si trascura l'attrito dell'aria quando vengono lasciati cadere. Utilizzando le formule di Newton la spiegazione è molto semplice. Se lasciamo cadere il corpo di massa (gravitazionale ed inerziale) m da un'altezza h , trascurando l'attrito dell'aria, possiamo scrivere:

$GmM_{\text{terra}}/(R_{\text{terra}}+h)^2=ma$ semplificando si ottiene $GM_{\text{terra}}/(R_{\text{terra}}+h)^2=a$ e quindi l'accelerazione che subisce un corpo dipende solo da valori costanti (si può trascurare la variazione dell'altezza rispetto al raggio terrestre) e vale $9,8 \text{ ms}^{-2}$. Su questa osservazione Einstein ha basato la sua teoria generale della relatività.

La terza legge del moto, detta anche principio di azione e reazione, afferma che, quando un corpo esercita una forza su un altro corpo, quest'ultimo reagisce esercitando sul primo una forza uguale e contraria.

L'utilizzo di questo apparato teorico ha permesso il calcolo di tutti i moti dei pianeti, dei gravi in caduta ecc. Tutte le leggi di Keplero e di Galileo sono state ricavate come casi particolari di leggi più generali: I principi della dinamica e la legge di gravitazione universale.

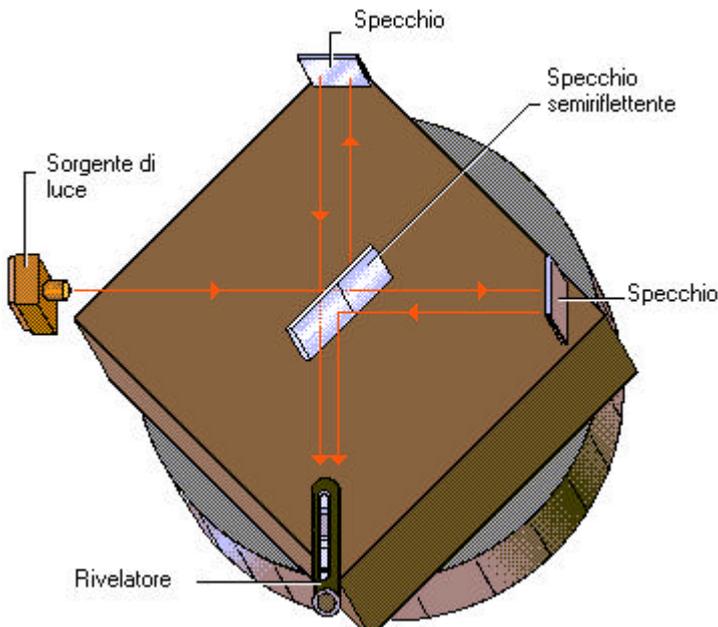
Newton, dal 1684 al 1686 si dedicò intensamente alla stesura dell'opera *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Principi matematici di filosofia naturale), più nota come *Principia*, che venne pubblicata nel 1687, nella quale sono esposte tutte le sue intuizioni e che ancora oggi rimane l'opera singola più importante della scienza. Dopo la pubblicazione dei *Principia* vi fu un grandissimo avanzamento della scienza e della meccanica in particolare. Un passo importante per la nostra storia è una elegante riformulazione dei principi della meccanica fatta da alcuni grandissimi fisici e matematici del XVIII secolo. Essi verificarono che i 3 principi enunciati da Newton erano equivalenti ad un unico principio: tra tutte le possibili traiettorie che un corpo può seguire per andare da un punto A ad un punto B, esso seguirà quella che rende minima una certa funzione matematica detta azione. Tale principio è perciò noto come "Principio di minima azione".



Nel XIX secolo, grazie ai contributi di numerosi scienziati del calibro di Michael Faraday, Heinrich Rudolf Hertz, James Clerk Maxwell, ed altri, fu compreso molto dei fenomeni elettrici e magnetici. Si vide che la luce non era altro che un'onda elettromagnetica, come lo sono le onde radio, e che essa viaggia ad una certa velocità indicata con la lettera c . Per inciso va ricordato che tale velocità è stata misurata per la prima

volta in laboratorio nel 1849, e che il suo valore oggi accettato è $c = 299.792.458 \text{ m/s}$.

La luce si comporta però in un modo molto strano. La velocità della sorgente che emette la luce sembra non avere alcuna influenza sulla velocità della luce emessa.



Esperimento di Michelson-Morley

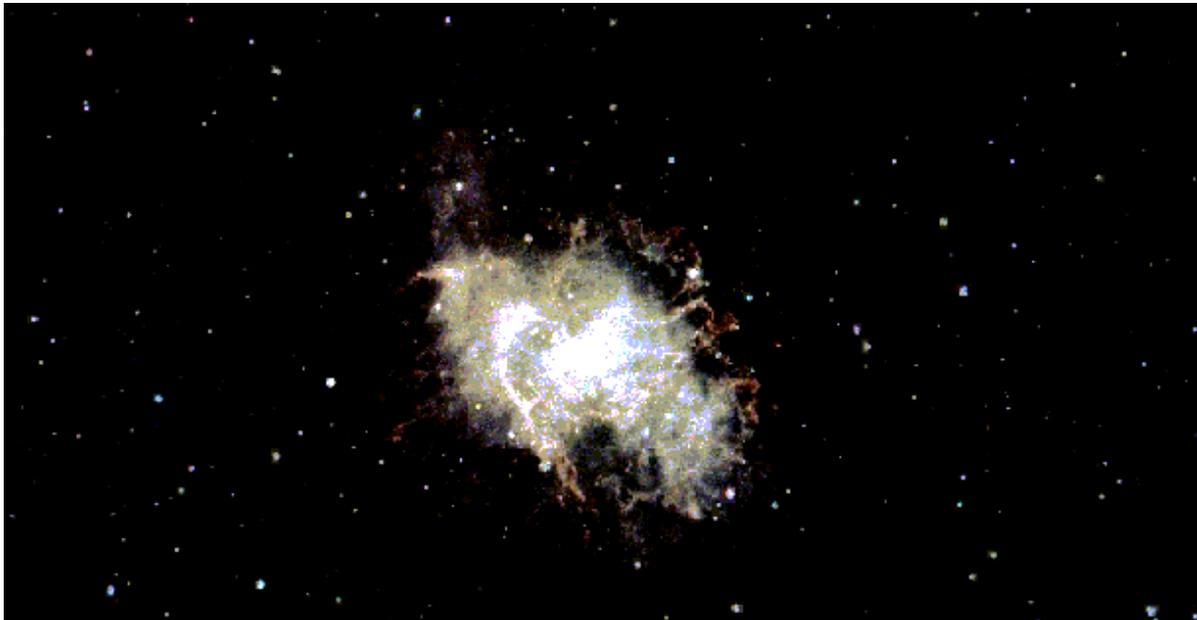
Questo esperimento fu ideato nel 1887 per misurare la velocità della Terra rispetto all'etere. Esso consisteva nel dividere, mediante uno specchio semiriflettente, un raggio luminoso in due raggi distinti a cui far compiere cammini uguali ma perpendicolari, e nell'osservare la figura di interferenza prodotta nell'ipotesi che la velocità della Terra influenzasse la propagazione della luce. L'esito negativo dell'esperimento aprì la strada alla formulazione della teoria della relatività di Einstein.

Se noi siamo su un treno che viaggia a 100 Km/ora e lanciamo una palla nella direzione di marcia a 50 Km/ora, allora per noi la palla si muove a 50 Km/ora, mentre per un osservatore a terra essa viaggia a 150 km/ora. Le due velocità, del treno e della palla si sommano (se il lancio fosse avvenuto nella direzione opposta alla marcia del treno le due velocità si sarebbero sottratte). Ma cosa succede se invece di lanciare una palla, lanciamo un impulso di luce? Albert Abraham Michelson, fisico statunitense di origine tedesca, nel suo famoso esperimento, conosciuto come esperimento di Michelson-Morley, dimostrò, in un colpo solo, sia l'inesistenza dell'etere, elemento che si supponeva permeasse l'universo e attraverso il quale

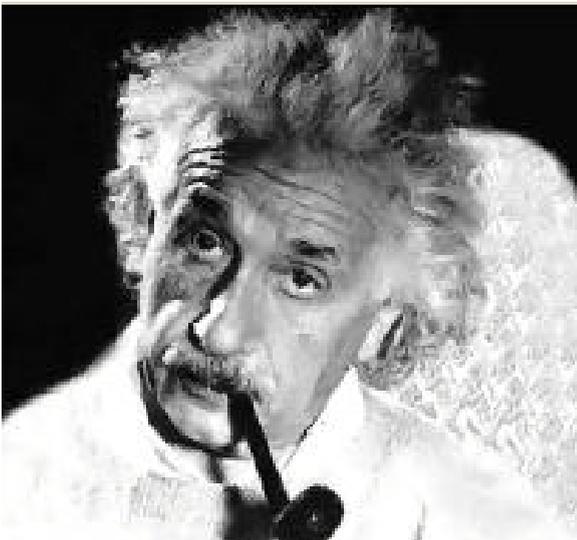
la luce doveva propagarsi, sia la costanza della velocità della luce rispetto a tutti i sistemi di riferimento.

Per questo suo esperimento, nel 1907 gli fu conferito il premio Nobel per la fisica.

Oltre che dall'esperimento di Michelson-Morley, la costanza della velocità della luce è verificata in innumerevoli ulteriori esperimenti ed osservazioni. La più spettacolare di queste è la nebulosa del granchio. Nel 1054 alcuni astronomi cinesi registrarono l'apparizione in cielo di una nuova stella così brillante da essere vista anche di giorno. Era l'esplosione di supernova che ha dato origine a quella che è oggi conosciuta come nebulosa del granchio. Essendo l'esplosione simmetrica in tutte le direzioni, se la velocità della luce si componesse come la velocità della palla sul treno, allora la luce emessa dai frammenti che si avvicinano a noi avrebbe una velocità totale aumentata di circa 1500 km/s che è la velocità stimata di tali frammenti.



Considerando che la distanza della nebulosa è 5000 anni luce si sarebbe dovuto osservare tale luminosità per ben 25 anni. In realtà, fonti dell'epoca indicano come tale luminosità si affievolì in un solo anno.



Nel 1905 Albet Einstein formulò la sua teoria della relatività ristretta sulla base di 2 principi fondamentali:

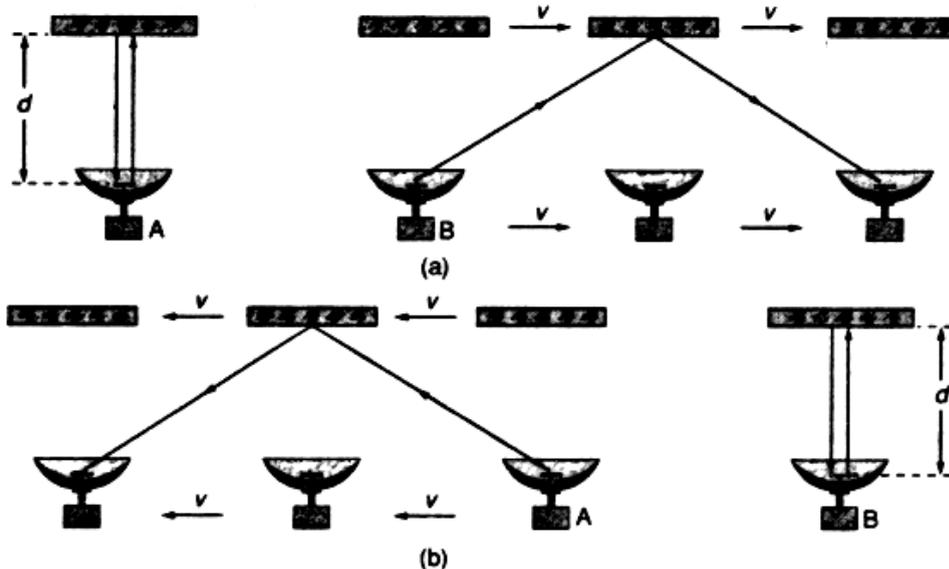
1. Tutte le leggi che governano i cambiamenti dello stato di un sistema fisico sono le stesse per tutti i sistemi di riferimento che si trovano in moto uniforme uno rispetto all'altro (è il noto

principio di inerzia già formulato da Galileo)

2. La velocità della luce nello spazio vuoto ha lo stesso valore c in tutti i sistemi inerziali, indipendentemente dallo stato di moto della sorgente emittente e rappresenta la velocità limite nella trasmissione dei segnali.

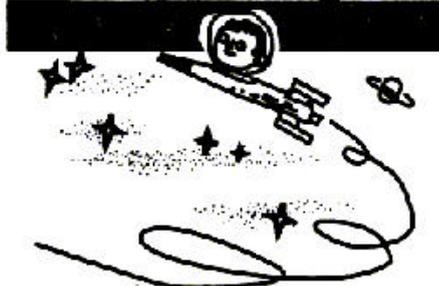
L'introduzione di questa teoria, se da un lato spiegava questi nuovi fenomeni messi in evidenza dall'esperimento di Michelson-Morley, da l'altro scardinava dalle fondamenta tutta l'impalcatura filosofica su cui era basata la meccanica newtoniana. Newton infatti aveva supposto che lo spazio ed il tempo fossero entità assolute. Con linguaggio moderno possiamo dire che egli supponeva che intervalli di tempo e di spazio misurati da osservatori posti in moto uniforme l'uno rispetto agli altri devono coincidere. Tornando all'esempio del treno, il tempo trascorso dal lancio della palla alla sua caduta sul pavimento del vagone doveva essere lo stesso se misurato dall'osservatore sul treno che da quello a terra. Identica cosa per lo spazio percorso dalla palla. Ebbene questi concetti così "banali" ed "intuitivi" sono scardinati dalla relatività ristretta di Einstein. La costanza della velocità della luce implica che le misure di tempo e spazio non sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento, ma dipendono dal moto relativo degli stessi.

Consideriamo infatti 2 sistemi di riferimento A e B, dotati di un orologio radar, composto da un radar ed uno specchio riflettente posto a distanza d nota, e che si muovono reciprocamente ad esempio su due binari paralleli. Al momento di congiunzione viene fatto partire da entrambi un impulso. Per A, il tempo che trascorre tra l'invio dell'impulso e la sua ricezione dopo la riflessione sullo specchio è $T=2d/c$ che possiamo considerare come unità di tempo per A. A vede B muoversi e nel tempo impiegato al segnale emesso da B a compiere il tragitto emittente-specchio-emittente l'apparato si sposta (ad esempio verso destra)



cosicché il segnale percorre un tragitto obliquo maggiore di $2d$. Essendo la velocità della luce la stessa, A concluderà che quando il suo orologio indica il trascorrere di una unità di tempo, il segnale dell'orologio di B non ha ancora compiuto un percorso completo. A conclude che l'orologio di B rallenta. Dal punto di vista di B la situazione è completamente invertita.

Per il primo principio della relatività entrambi hanno ragione. Se ne conclude quindi che la misura del tempo non è assoluta ma dipende dall'osservatore. Solo due osservatori reciprocamente fermi misureranno lo stesso tempo. Se invece si muovono, ciascuno osserverà che il tempo dell'altro rallenterà, rispetto al proprio secondo una ben precisa formula che dipende dalla velocità reciproca. Più la velocità è alta, maggiore sarà il rallentamento del tempo. Al limite, se i due osservatori si allontanano alla velocità della luce, ciascuno osserverà il tempo dell'altro fermarsi.



Suscita sempre molta meraviglia quello che è comunemente conosciuto come il paradosso dei due gemelli. Se uno di loro parte, per un viaggio di andata e ritorno, verso una stella lontana ad una velocità vicina a quella della luce, quando tornerà, troverà il suo fratello molto più vecchio. Per lui il tempo è trascorso molto più lentamente. E' da notare che in questo esperimento non vi è perfetta simmetria tra i due osservatori. La simmetria viene infranta quando uno di loro accelera (cambia cioè la sua velocità) invertendo il suo stato di moto. Tra i due gemelli sarà più giovane quello che sperimenta l'accelerazione.

Considerazioni analoghe fatte per la dilatazione temporale, valgono anche per le misure delle distanze. Anche per queste, due osservatori in moto reciproco osserveranno che le distanze misurate dall'altro saranno diverse, ed in particolare le lunghezze lungo la direzione del moto reciproco saranno più corte, mentre quelle perpendicolari al moto rimangono inalterate.

Il fisico olandese Hendrik Antoon Lorentz, in collaborazione con il fisico irlandese George Francis Fitzgerald formulò una teoria sulla deformazione subita da un

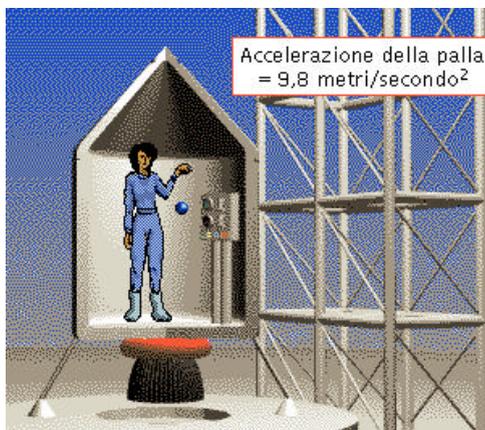
corpo in rapido movimento; proponendo, ancora prima della formulazione della teoria della relatività, le equazioni esatte, dette trasformazioni di Lorentz, per il calcolo delle dilatazioni temporali e delle contrazioni spaziali.

Lo spazio e il tempo non si possono quindi più considerare elementi assoluti ma si dovrà parlare di uno spazio tempo a quattro dimensioni.

Tra i tanti risultati che la teoria della relatività ristretta ha permesso di acquisire va ricordata l'equivalenza tra la massa e l'energia secondo la nota equazione $E=mc^2$ e la chiarificazione del significato di azione.. Nell'ambito relativistico l'azione di un corpo, è la sua traiettoria nello spazio quadridimensionale. Il principio di minima azione si può quindi formulare così: tra tutti i possibili percorsi che una particella può seguire per andare da un punto A ad un punto B nello spazio quadridimensionale, essa percorrerà quello più breve.

Questa riformulazione del principio di minima azione può essere considerata l'aggiornamento delle 3 leggi di Newton della dinamica.

Tra il 1911 ed il 1915 Einstein "aggiornò" anche la teoria Newtoniana della gravitazione. Più che di aggiornamento si deve in realtà parlare di una vera e propria rivoluzione. Con un suo famoso esperimento mentale, egli fece vedere come l'uguaglianza, o meglio l'equivalenza, tra la massa inerziale e quella gravitazionale, oltre a spiegare l'esperimento di Galileo dalla torre di Pisa, può essere presa a base di una nuova teoria della gravitazione che superasse i problemi di quella Newtoniana. Secondo Newton infatti la forza di attrazione gravitazionale tra due corpi lontani, doveva agire in modo istantaneo. La velocità di trasmissione della forza doveva quindi essere infinita, in aperto contrasto con i postulati della relatività ristretta.



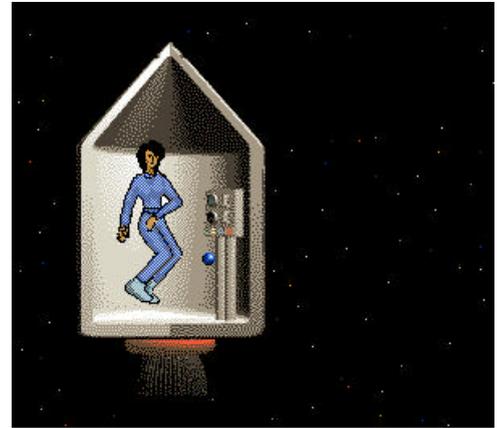
L'esperimento di Einstein consiste nel constatare che l'azione della gravità su di un corpo, si comporta (localmente) come un sistema di riferimento non inerziale. Infatti se consideriamo un astronauta nella sua cabina a terra, egli misurerà, per una palla che lascia cadere, un'accelerazione di $9,8 \text{ m/s}^2$. Se ora immaginiamo lo stesso astronauta nello spazio con l'astronave che accelera a $9,8 \text{ m/s}^2$, egli vedrà la palla cadere nello stesso modo come quando



era fermo sulla terra. Nessun esperimento gli permetterà di distinguere se sia fermo sulla terra o nello spazio vuoto sottoposto ad una accelerazione uguale a quella impressa dalla gravità della terra.

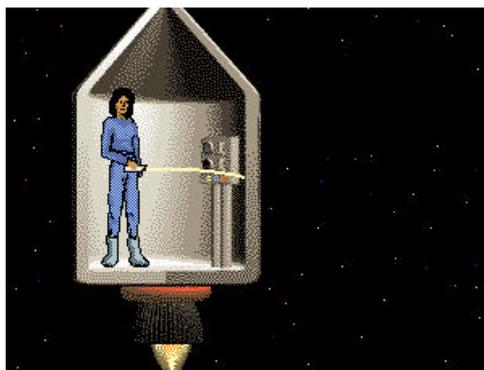
Analogamente se prendiamo un astronauta nel vuoto, egli non vedrà

cadere alcun oggetto. Lo stesso stato sarà da lui sperimentato se si trova sulla terra in caduta libera. Per tutto il tempo della caduta, nessun esperimento gli permetterà di stabilire in quale situazione si trovi, se fermo nello spazio profondo e in una tragica caduta libera sulla terra (o altro pianeta).



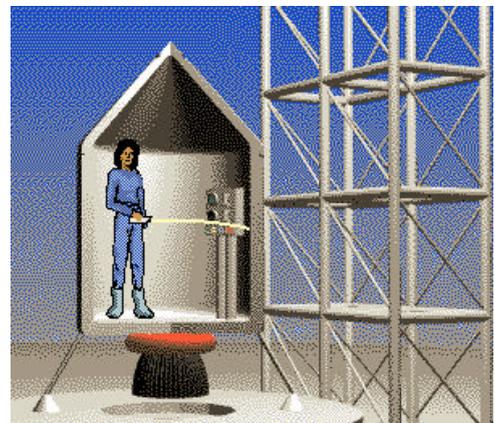
Questo è il così detto "principio di equivalenza" che è alla base della teoria della relatività generale di Einstein.

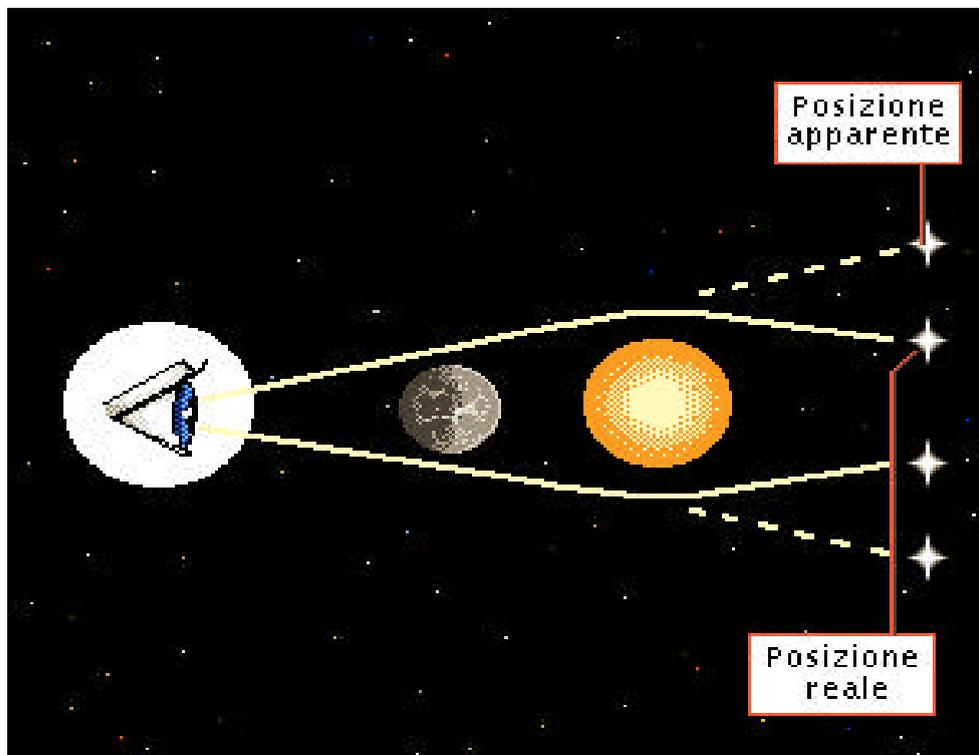
Data l'equivalenza tra la gravità ed i sistemi di riferimento non inerziali, per poter descrivere la prima, sarà sufficiente descrivere le leggi della fisica in assenza di gravità ma in un sistema di riferimento non inerziale (accelerato).



Un raggio di luce lanciato dall'astronauta nello spazio in moto accelerato devierà leggermente in quanto nel tempo di volo tra i due lati della cabina, l'astronave ha accelerato. Analoga situazione dovrà quindi verificarsi in presenza di gravità.

Se si applica quest'effetto alla luce proveniente da stelle quando il sole passa vicino alla loro linea di vista, osserveremo uno spostamento apparente della loro posizione. Questo fu proprio l'effetto che permise la prima verifica sperimentale della teoria della relatività generale.





La descrizione delle leggi della natura in un sistema di riferimento accelerato implica che le relazioni geometriche a cui siamo abituati non sono più le stesse. Ad esempio il rapporto tra il diametro e la circonferenza di un cerchio non vale più 3,14... (π) ma avrà un valore diverso. Ciò implica che la geometria che descrive questo spazio non è più quella euclidea e che lo spazio stesso non è quello piatto a cui siamo abituati, ma dovremo parlare di uno spazio curvo.

Il principio di equivalenza ci autorizza quindi ad affermare che l'effetto della gravità è quello di "incurvare lo spazio" e rendere la geometria che lo descrive di tipo "NON euclideo".

Le nuove equazioni trovate da Einstein per descrivere la gravità, saranno quindi equazioni in cui l'incognita è la geometria dello spazio descritta da una grandezza matematica detta tensore metrico. Esse sono estremamente complesse e difficilmente risolvibili. Però, se ci limitiamo a velocità piccole rispetto a quella della luce ed a campi gravitazionali deboli, queste equazioni si approssimano a quella di Newton.

Per concludere possiamo chiederci perché la terra gira intorno al sole in orbita ellittica. Ebbene, alla luce di quanto detto, possiamo dire che lo spazio è incurvato dalla massa del sole e che la terra percorre in questo spazio la traiettoria più breve (il principio di minima azione rimane ovviamente sempre valido). Mentre in uno spazio piatto la linea più breve che unisce due punti è una retta, in uno spazio curvo essa è una curva, detta geodetica. La proiezione di questa geodetica sulla parte spaziale dello spazio tempo è l'orbita ellittica della terra.